可逆的断熱体積変化の微分方程式を解く（ポアソンの式）

可逆的断熱体積変化の微分方程式

$(P,\ V,\ T)$から$(P+dP,\ V+dV,\ T+dT)$に微小変化した場合を考える。

内部エネルギーの微小変化をdU，このとき気体がする微小の仕事をdWとすると，

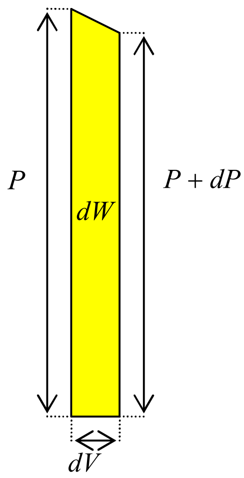
断熱変化だから，$0=dU+dW$

内部エネルギーの微小変化dU

$$
\begin{aligned}
dU &= nC_{\mathrm{v}}(T+dT)-nC_{\mathrm{v}}T \\
&= nC_{\mathrm{v}}dT
\end{aligned}
$$

微小の仕事dW

$$
\begin{aligned}
dW &= \frac{1}{2}\{(P+dP)+P\}\{(V+dV)-V\} \\
&= PdV+\frac{1}{2}dPdV
\end{aligned}
$$



ここで，$dPdV$ は無視してよいから，

$dW=PdV$

また，理想気体の状態方程式より，

$$P=\frac{nRT}{V}$$

よって，$dW=\dfrac{nRT}{V}dV$

よって，$0=dU+dW$ は$0=nC_{\mathrm{v}}dT+\dfrac{nRT}{V}dV$と表せる。

これを整理し$\dfrac{dT}{T}=-\dfrac{R}{C_{\mathrm{v}}}\cdot\dfrac{dV}{V}$　・・・①　とし，これを可逆的断熱体積変化の微分方程式とする。

可逆的断熱体積変化の微分方程式を解く

①の両辺について不定積分を行う。

$$\int \frac{dT}{T} = \int -\frac{R}{C_v} \cdot \frac{dV}{V}$$

$$\int \frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_v} \int \frac{dV}{V}$$

$$\log T = -\frac{R}{C_v} \log V + \mathrm{A}$$ （A は積分定数）

$$\log T = \log V^{-\frac{R}{C_v}} + \mathrm{A}$$

$$\log T - \log V^{-\frac{R}{C_v}} = \mathrm{A}$$

$$\log \frac{T}{V^{-\frac{R}{C_v}}} = \mathrm{A}$$

$$\log TV^{\frac{R}{C_v}} = \mathrm{A}$$

A は定数だから，可逆的断熱体積変化の微分方程式の解は　$TV^{\frac{R}{C_v}} =$ 一定　･･･②

または，

$PV = nRT$ より，$T = \dfrac{PV}{nR}$ だから，これを②に代入すると　$\dfrac{PV}{nR} \cdot V^{\frac{R}{C_v}} =$ 一定

n は系内部の気体の物質量で一定，R は気体定数だから nR は一定である。

よって，可逆的断熱体積変化の微分方程式の解は　$PV^{1+\frac{R}{C_v}} =$ 一定　･･･③

ポアソンの式

②，③のままでもいいが，$C_p = C_v + R$ より，$\dfrac{R}{C_v} = \dfrac{C_p - C_v}{C_v} = \dfrac{C_p}{C_v} - 1$

ここで，比熱比 $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v}$ とおくと，

②は $TV^{\gamma-1} =$ 一定

③は，$PV^{\gamma} =$ 一定

となる。

これを**ポアソンの式**または**ポアソンの法則**という。

ポアソンの式: $TV^{\gamma-1} =$ 一定　または　$PV^{\gamma} =$ 一定　$\left(\gamma = \dfrac{C_p}{C_v} \right)$

補足

1. 比熱比について

理想気体が単原子分子の場合 $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v} = \dfrac{\frac{5}{2}R}{\frac{3}{2}R} = \dfrac{5}{3}$

理想気体が二原子分子の場合 $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v} = \dfrac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = \dfrac{7}{5}$

2. 気体分子の運動の自由度を f とすると，$C_v = \dfrac{f}{2}R$

単原子分子は球状分子とするので，
xyz 座標空間の並進運動成分 x, y, z をもつから，自由度 $f = 3$
二原子分子は，直線分子とするので，
並進運動成分 x, y, z の自由度 3 と直線の傾きを任意にとるための自由度 2 をもつから，
自由度 $f = 5$
よって，

単原子分子の $C_v = \dfrac{3}{2}R$

二原子分子の $C_v = \dfrac{5}{2}R$